$= \int_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \text{Log}x.\,dx$ a l'aide de la relation de Chasles sur les intégrales

Ainsi $\forall n \in \text{IN}^*; \int_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \text{Log}x\,dx \leq \text{Log}(n!)$.

c- $\forall n \in \text{IN}^*; \int_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \text{Log}x\,dx$ $\left(\begin{array}{lll} u'(x)=1 & \rightsquigarrow & u(x)=x \\ v(x)=\text{Log}x & \rightsquigarrow & v'(x)=\frac{1}{x} \end{array}\right)$

$= [x\text{Log}x]_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \int_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} 1\,dx = [x\text{Log}x]_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - [x]_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$

$= \left(n+\frac{1}{2}\right)\text{Log}\left(n+\frac{1}{2}\right) - n + \frac{1}{2}\text{Log}2.$

4/a- D'abord $\forall n \in \text{IN}^*; u_n - \frac{1}{2}\text{Log}2 = \text{Log}(n!) - \left(n+\frac{1}{2}\right)\text{Log}n + n - \frac{1}{2}\text{Log}2$

Or $\forall n \in \text{IN}^*; \text{Log}(n!) \geq \left(n+\frac{1}{2}\right).\text{Log}\left(n+\frac{1}{2}\right) - n + \frac{1}{2}\text{Log}2.$

donc $\forall n \in \text{IN}^*; u_n - \frac{1}{2}\text{Log}2 \geq \left(n+\frac{1}{2}\right)\left[\text{Log}\left(n+\frac{1}{2}\right) - \text{Log}n\right]$

d'ou $\forall n \in \text{IN}^*; u_n - \frac{1}{2}\text{Log}2 \geq 0$ car $\text{Log}\left(n+\frac{1}{2}\right) \geq \text{Log}n$

b- $u_n - u_{n+1} =$

$= \text{Log}(n!) - \left(n+\frac{1}{2}\right)\text{Log}n + n - \text{Log}[(n+1)!] + \left(n+\frac{3}{2}\right)\text{Log}(n+1) - n - 1$

$= \text{Log}(n!) - \left(n+\frac{1}{2}\right)\text{Log}n - \text{Log}[n+1] - \text{Log}(n!) + \left(n+\frac{3}{2}\right)\text{Log}(n+1) - 1$

$= -\left(n+\frac{1}{2}\right)\text{Log}n + \left(n+\frac{1}{2}\right)\text{Log}(n+1) - 1$

$= \frac{(2n+1)}{2}[\text{Log}(n+1) - \text{Log}n] - 1$

$= (2n+1)\left[\frac{1}{2}\text{Log}\left(\frac{n+1}{n}\right) - \frac{1}{2n+1}\right]$

Or $f\left(\frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}\text{Log}\left(\frac{1+\frac{1}{2n+1}}{1-\frac{1}{2n+1}}\right) - \frac{1}{2n+1}$

$= \frac{1}{2}\text{Log}\left(\frac{\frac{2n+2}{2n+1}}{\frac{2n}{2n+1}}\right) - \frac{1}{2n+1} = \frac{1}{2}\text{Log}\left(\frac{n+1}{n}\right) - \frac{1}{2n+1}$

Conclusion : $u_n - u_{n+1} = (2n+1)f\left(\frac{1}{2n+1}\right)$.

c- $\forall n \in \text{IN}^*; 1 > \frac{1}{2n+1} > 0$

$\Leftrightarrow \forall n \in \text{IN}^*; f\left(\frac{1}{2n+1}\right) > f(0) = 0$ car f est strictement ↗.

$\Leftrightarrow \forall n \in \text{IN}^*; (2n+1)f\left(\frac{1}{2n+1}\right) > 0$

$\Leftrightarrow \forall n \in \text{IN}^*; u_n - u_{n+1} > 0 \Leftrightarrow (u_n)$ est décroissante sur IN^*.

De plus (u_n) est minorée par $\frac{1}{2}\text{Log}2$ **donc** (u_n) est convergente.

II/1/ $v_0 = \int_0^1 (1-x)^{\frac{1}{2}}\,dx = -\int_0^1 (1-x)'(1-x)^{\frac{1}{2}}\,dx = -\left[\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{1}{2}+1}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$

2/a- Posons (C) : $y^2 - x(1-x) = 0$.